Übungsklausur - Kursstufe 1 - Analysis
Lösungen

Marvin Gassmann

20. November 2023

Aufgabe 1:

Schwierigkeitsgrad: ★★☆ - ★★★

$A(x) = -2x^2 + 8x + 8$
Scheitelpunkt (globales Maximum) bei: $x = 2$

Koordinaten der Punkte:
$A(4|0)$
$B(0|0)$
$C(0|-4)$
$D(2|-6)$

Aufgabe 2:

Schwierigkeitsgrad: Crazy Shit!!!!!!!!

Sei y die Höhe und x die Breite des Rechtecks:
$A(x) = x \cdot (h - (\frac{h}{c} \cdot x)) = h \cdot x - \frac{h}{c} \cdot x^2$
Maximum bei $x = \frac{c}{2} \Rightarrow y = \frac{h}{2}$

Aufgabe 3:

Schwierigkeitsgrad: ★☆☆ - ★★★

Leite die folgenden Funktionen ab.

a) $f'(x) = 2x \cdot sin^2(x) + 2x^2 \cdot cos(x) \cdot sin(x) =$
$2x \cdot sin(x) \cdot (sin(x) + x \cdot cos(x))$
b) $g'(x) = \frac{2x}{x^2+3} - \frac{2x^3}{(x^2+3)^2} = \frac{6x}{(x^2+3)^2}$
c) $h'(x) = 26 \cdot (2x+5)^{12}$
d) $i'(t) = \frac{2\cdot(x^2+1)^3}{3\cdot\sqrt[3]{x}} + 6 \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot (x^2+1)^2$
e) $j'(x) = 2 \cdot k'(x) \cdot k(x)$

Aufgabe 4:

Schwierigkeitsgrad: ★★☆

$h = \frac{45-\frac{\pi}{2}\cdot r^2}{2r}$

$U(r) = (2+\pi)\cdot r + 2\cdot\frac{45-\frac{\pi}{2}\cdot r^2}{2r} = (2+\pi)\cdot r + \frac{45-\frac{\pi}{2}\cdot r^2}{r} = (2+\frac{\pi}{2})\cdot r + \frac{45}{r}$

$r_{min} = 3\cdot\sqrt{\frac{10}{4+\pi}} \approx 3,55[m] \Rightarrow h_{min} \approx 3,55[m]$

Aufgabe 5:

Schwierigkeitsgrad: ★★☆

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h\cdot(2x+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) \overset{h\to 0}{=} 2x$

Aufgabe 6:

Schwierigkeitsgrad: ★☆☆

$W(2|2)$

$t: \quad y = -3x+8$

Aufgabe 7:

Schwierigkeitsgrad: ★★☆

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$

Aufgabe 8:

Schwierigkeitsgrad: ★☆☆ - ★★☆

Man bestimme das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen.

a) Die Funktion f ist monoton steigend auf $]-\infty;-2]$, monoton fallend auf $[-2;4]$ und monoton steigend auf $[4;\infty[$

b) Die Funktion g ist monoton fallend auf $]-\infty;-4]$, monoton steigend auf $[-4;0]$, monoton fallend auf $[0;2]$ und monoton steigend auf $[2;\infty[$

c) Die Funktion h ist monoton steigend auf $]-\infty;0]$, monoton fallend auf $[0;1]$ und monoton steigend auf $[1;\infty]$

Aufgabe 9:
Schwierigkeitsgrad: ★★☆ - ★★★

Eine Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ soll durch den Punkt $P(5|0)$ verlaufen.

a) $B(1,8|2,4)$; $t: y = 0,75x + 3,75$
b) $y = \frac{\sqrt{9-x_0^2}}{x_0} \cdot (x - x_0) + \sqrt{9-x_0^2} = \frac{\sqrt{9-x_0^2}}{x_0} \cdot x$
Der Punkt $P(0|0)$ liegt offensichtlich auf der Normalen. Für $x_0 = 0$ ist die y-Achse die Normale.
c) Der Graph von f ist ein Halbkreis um den Ursprung mit Radius 3 LE und liegt oberhalb der x-Achse.

Aufgabe 10:
Schwierigkeitsgrad: ★☆☆ - ★★☆

Man führe eine Kurvendiskussion an den folgenden Funktionen durch.

a) Nullstellen bei -1;0;1 y-Achsenabschnitt bei (0|0) $H(-0,577|0,385)$; $T(0,577|-0,385)$ $W(0|0)$ Punktsymmetrie zum Ursprung $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ plus Skizze vom Verlauf des Graphen
b) Nullstellen bei -1;4 y-Achsenabschnitt bei (0|2) Keine Hoch- und Tiefpunkte Keine Wendepunkte Weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ plus Skizze vom Verlauf des Graphen
c) Nullstellen bei 0; 3 y-Achsenabschnitt bei (0|0) $H(1|4)$; $T(3|0)$ $W(2|2)$ Weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ plus Skizze vom Verlauf des Graphen
d) Nullstellen bei -3,644; -1,841; 0; 1,841; 3,644 y-Achsenabschnitt bei (0|0) $T(-3|-6); H(-1|2,444); T(1|-2,444); H(3|6)$ $W(-2,236|-2,485); W(0|0); W(2,236|2,485)$ Weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ plus Skizze vom Verlauf des Graphen